Clase 14

Potencial Eléctrico

Energía de una configuración

Ejemplo 40: Energía de un cascarón esférico de radio R con densidad uniforme y carga total Q.

Como ya vimos el potencial sobre ese cascarón es $V(R) = [Q/(4\pi\epsilon_0 R)]$. La energía de la configuración será entonces,

$$U_E = \frac{1}{2}\int_{\S} \sigma(\vec{\mathbf{r}}')V(\vec{\mathbf{r}}')dS = \int_S \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R}\sigma dS = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R}\int_S \sigma dS = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

Ejemplo 41: Energía de un cascarón esférico de radio R con densidad uniforme y carga total Q.

El ejemplo anterior lo podemos analizar desde otro punto de vista. Supongamos que construimos la configuración de carga trayendo cargas infinitesimales desde el infinito. Si el cascarón tiene carga q nos cuesta una energía

$$dU_E = V dq = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}dq$$

traer esa carga infinitesimal. La energía de la configuración es la suma de todos los aportes necesarios,

$$U_E = \int dU_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R}\int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

corroborando el resultado anterior.

Ejemplo 42: Energía de una distribución esférica de carga con densidad uniforme de carga ρ y carga total Q.

Necesitamos primero calcular el potencial dentro de la esfera. Sobre la esfera el potencial es nuevamente $V(R) = [Q/(4\pi\epsilon_0 R)]$. Recordamos que dentro de la esfera el campo eléctrico es lineal en r y tiene la expresión:

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\hat{\mathbf{r}}}{R^3}$$

El potencial entonces vale,

$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{Q}{(4\pi\epsilon_0 R} - \int_R^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{R^3}dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\int_R^r rdr \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3}(\frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2}) = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{Qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} \end{aligned}$$

Podemos verificar el resultado $V(0) = (3Q)/(8\pi\epsilon_0)$ en el origen por integración directa La energía electrostática de la configuración es,

$$U_E = \frac{1}{2}\int_\Omega \rho(\vec{\mathbf{r}}')dV = 2\pi\rho\int_0^R \left[\frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{Qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3}\right] r^2 dr$$

donde hemos sustituido el resultado 4π de la integral en las variables angulares. La otra integral es trivial y obtenemos el resultado,

$$U_E = 2\pi\rho\left[\frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R}\frac{R^3}{3} - \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3}\frac{R^5}{5}\right] == \frac{\rho Q R^2}{5\epsilon_0} = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R} \ .$$

Capacitancia y dieléctricos

Capacitancia

Debido a la movilidad de las cargas los materiales conductores presentan las dos características principales que hemos resaltado en las discusiones precedentes: el campo eléctrico dentro del material se anula y e potencial en todos los puntos del conductor es el mismo. Dados dos conductores cargados la diferencia de potencial entre un punto de uno y un punto del otro es única y bien definida y es interesante preguntarse como es la relación que existe entre esa diferencia de potencial y la carga de los conductores. La respuesta resulta ser muy simple y en particular cuando la carga en los conductores es de igual módulo y signos opuestos se puede demostrar que la diferencia de potencial es proporcional al valor de la carga en cualquiera de ellos.

Definimos la capacitancia C entre dos conductores con cargas Q y $-Q$ a la constante de proporcionalidad entre a carga y la diferencia de potencial y escribimos

$$Q = C\Delta V \quad .$$

La capacitancia depende de los aspectos geométricos de la configuración de conductores y nos da una medida de cuanta carga podemos acumular en los conductores cuando establecemos una diferencia de potencial entre ellos. Las unidades para la capacitancia en el sistema internacional son

$$[C] = \frac{Coulomb}{Voltio} = Faradio = F$$

aunque es mas común usar submúltiplos entre $microfaradios = 10^{-6}F$ y $picofaradios = 10^{-12}F$.

El capacitor de placas paralelas

Calculemos la capacitancia para un dispositivo formado por dos placas conductoras paralelas de área A separadas por una distancia d. Despreciando los efectos de borde hacemos el cálculo aproximando con el potencial correspondiente a las placas infinitas. En ese caso vimos que $\Delta V = (\sigma d)/\epsilon_0$ por lo que tenemos

$$Q = C\Delta V = C\frac{d\sigma}{\epsilon_0} = A\sigma \rightarrow C = \frac{A\epsilon_0}{d} \quad .$$

Vemos que efectivamente la capacitancia sólo depende de los aspectos geométricos de la configuración de conductores, conviniensdo recordar la dependencia lineal en A e inversamente proporcional con d.

Ejemplo 43: Calcular la capacitancia de un capacitor co $A = 10cm^2$ y $d = 1mm$. Considerando que el campo eléctrico de ionización del aire es $E_{max} = 30{,}000\frac{v}{cm}$ encontrar la carga máxima que se puede colocar en el capacitor.

La permitividad del vacío vale $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}\frac{F}{m}$. Usando la expresión anterior $C = 8,85 \times 10^{-12}F$.

Como entre las placas $E = \sigma/\epsilon_0$ la densidad de carga máxima será $\sigma_{max} = \epsilon_0 E_{max}$ y la carga máxima $Q_{max} = A\epsilon_0 E_{max}$ Sustituyendo los valores encontramos $Q_{max} = 2,66 \times 10^{-10}C$ que corresponde a mil seiscientos millones de cargas electrónicas.

Capacitancia de un conductor aislado

Cuando tenemos un conductor aislado podemos definir su capacitancia relacionando la carga con la diferencia de potencial medida con respecto al infinito que escogemos a potencial cero. Escribimos nuevamente $Q = C\Delta V$.

Ejemplo 44: Capacitancia de una esfera.

Si tenemos una esfera de radio R y carga Q hemos visto que el potencial en todos los puntos de la esfera es $V = Q/(4\pi\epsilon_0 R)$. De la definición encontramos que la capacitancia es $C = 4\pi\epsilon_0 R$. Nuevamente en la capacitancia sólo aparecen los aspectos geométricos del conductor.

Energía en un capacitor

Podemos calcular la energía en un capacitor imaginando que lo cargamos trayendo sucesivas cantidades infinitesimales dq desde la placa con carga negativa hast la placa con carga positiva. Cuando la carga en ésta es q la diferencia de potencial es q/C y la energía necesaria para la operación es $dU_E = q\Delta V = (q/C)dq$. Integrando tenemos,

$$U_E = \int dU_E = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}$$

Alternativamente podemos escribir $U_E = \frac{1}{2} Q\Delta V$ de acuerdo con nuestra discusión general de energía de una configuración.